DS05 Ondes et mécanique

Pb 1

I1-a) Syst = masse m, soumis à $\vec{P} = m\vec{g}$

Dans $\mathcal{R}_T$ galiléen :

$$m\vec{a} = m\vec{g} \qquad \vec{a} = \vec{g} = -g\vec{e_z}$$

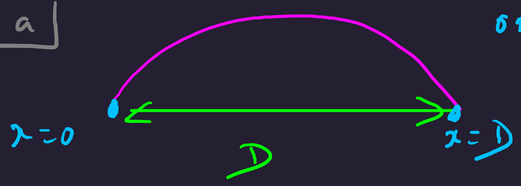
Avec les CI : $x = 0$, $\dot{x}_0 = v_0\cos(\alpha)$; $z = 0$, $\dot{z}_0 = v_0\sin(\alpha)$

$$\boxed{x = v_0\cos(\alpha)t \qquad z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\alpha)t}$$

I-1-b) $t = \dfrac{x}{v_0\cos(\alpha)}$

$$\rightarrow \boxed{z = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2(\alpha)} + x\tan(\alpha)}$$

I-2 a) on veut que $x(z=0) = D$



ie, pour $x \neq 0$ $x = \dfrac{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)v_0^2}{g} = \dfrac{v_0^2\sin(2\alpha)}{g}$

On a donc $x_{max} = \dfrac{v_0^2}{g} = D$ ie $\boxed{v_0 = \sqrt{gD}} \equiv v_{min1}$

I-2 b) On cherche la valeur minimale de v pour laquelle il existe un angle α tel que $z(x=D) = H$, soit, en utilisant $\dfrac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2\alpha$:

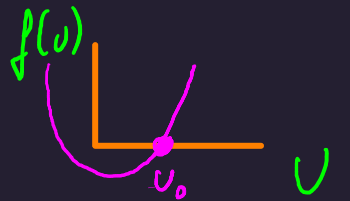
$$H = \frac{-gD^2}{2v_0^2}(1+\tan^2\alpha) + D\tan\alpha, \text{ ie :}$$

$$\tan^2\alpha - \frac{2v_0^2}{gD}\tan\alpha + \frac{2v_0^2H}{gD^2} + 1 = 0$$

$$\Delta = \frac{4v_0^4}{g^2D^2} - 4\left(1 + \frac{2v_0^2H}{gD^2}\right)$$

Il existera des solutions de ce trinôme si $\Delta > 0$

ie $f(U) = \left(\underbrace{\dfrac{v_0^2}{gD}}_{U}\right)^2 - 2\dfrac{v_0^2}{gD}\dfrac{H}{D} - 1 > 0$.



On aura $f(U) > 0$ pour $U > U_0$: racine positive qui est $U_0 = \dfrac{H}{D} + \sqrt{\dfrac{H^2}{D^2} + 1}$

ie $$\underbrace{\boxed{v_0^2 > gD\left(\frac{H}{D} + \sqrt{1 + \frac{H^2}{D^2}}\right)}}_{v_{min\,2}^2}$$

I-2-c) On calcule $\boxed{v_{min1} = 18{,}5\ m.s^{-1} \quad v_{min2} = 19{,}2\ m.s^{-1}}$

I-3-a) Il s'agit du même problème qu'au I-2-b)

$$v_{min3} = \sqrt{\underset{9{,}8}{g}\, d\left(\frac{h}{d} + \sqrt{1+\frac{h^2}{d^2}}\right)} \quad ; 1$$

9,2

$= 10{,}6\ m.s^{-1}$

I-3-b) On veut $H = \frac{-gD^2}{2v_0^2}(1+\tan^2\alpha) + D\tan\alpha$

$$h = \frac{-gd^2}{2v_0^2}(1+\tan^2\alpha) + d\tan\alpha$$

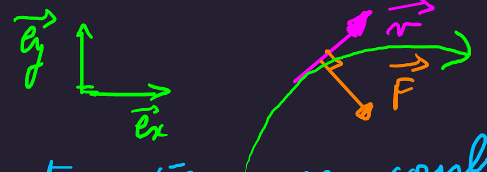
soit $\frac{H - D\tan\alpha}{D^2} = \frac{h - d\tan\alpha}{d^2} = \frac{-g}{2v_0^2}(1+\tan^2\alpha)$

puis $\boxed{\tan\alpha = \frac{\frac{h}{d^2} - \frac{H}{D^2}}{\frac{1}{d} - \frac{1}{D}} \quad \text{ie } \alpha = 15{,}8° \text{ puis } v_0 = 29{,}6\ m.s^{-1}}$

elle est indépendante de v_0

II-1) $\vec{F}_M = m K_M(\dot y\, \vec{e_x} - \dot x\, \vec{e_y})$: 1 vitesse selon $\vec{e_x}$, avec $\dot x \geq 0$ conduira à une force selon $-\vec{e_y}$

$\vec{e_y}$ $\quad \dot y > 0 \quad$ $+\vec{e_x}$.



et $\vec{F}_M \cdot \vec{v} = 0$

La trajectoire sera courbée « vers la droite ».

II-2-a) On a $m\vec{a} = m\vec{g} - \frac{1}{2} C\pi R^2 \rho v \vec{v} + \vec{F}_M$

selon $\vec{e_z}$: $\quad \ddot z = -g - \frac{1}{2} C\pi R^2 \rho v \dot z / m$

II-2-b) Asymptotiquement, on aura $\dot z = -v_{lim}$ = cte

soit $m g = \frac{1}{2} C\pi R^2 \rho v_{lim}^2$ → indépendant de v_0.

$$\boxed{v_{lim} = \sqrt{\frac{2 \underset{9{,}8}{g}\, \overset{0{,}43}{m}}{\underset{0{,}45}{C}\,\pi\, \underset{0{,}11}{R^2}\, \underset{1{,}1}{\rho}}} = 22\ m.s^{-1}}$$

On peut réécrire

$$\ddot z = -\underbrace{\frac{1}{2m} C\pi R^2 \rho v_{lim}^2}_{\text{homogène à } \frac{v_{lim}}{\tau}} \left(1 + \frac{v \dot z}{v_{lim}^2}\right)$$

→ $\tau = \frac{2m}{v_{lim}} = \frac{v_{lim}}{C\pi R^2\rho}$

$\boxed{\tau = 2{,}15\ s}$

Comme $v_{lim} \not\gg v_0$ les frottements ne sont pas négligeables

II-3-a) On a

$$m\vec{a} = m\vec{g} + m K_m (\dot{y}\,\vec{e_x} - \dot{x}\,\vec{e_y})$$

$$\left.\begin{array}{ll} \vec{e_x} : & \ddot{x} = K_m \dot{y} \\ \vec{e_y} : & \ddot{y} = -K_m \dot{x} \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} q = x + iy \\ \dot{q} = \dot{x} + i\dot{y} \end{array} \qquad \ddot{q} = \ddot{x} + i\ddot{y}$$

$$\rightarrow \ddot{q} = K_m(\dot{y} - i\dot{x}) = -i K_m \dot{q}$$

$$\boxed{\ddot{q} + \gamma \dot{q} = 0 \text{ avec } \gamma = i K_m}$$

II-3-b) C.I $q(0) = 0$; $\dot{q}(0) = \dot{x}_0 = v_0 \cos(\alpha)$.

L'unique solution vérifiant $\dot{q}(0) = \dot{x}_0$ est :

$$\dot{q} = v_0 \cos\alpha \, e^{-iK_m t}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \dot{x} = \mathrm{Re}(\dot{q}) = v_0\cos(\alpha)\cos(K_m t) \\ \dot{y} = \mathrm{Im}(\dot{q}) = -v_0\cos(\alpha)\sin(K_m t) \end{array}}$$

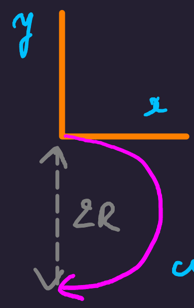
II-3-c)

$$\int_0^t \dot{q}(t)\,dt = v_0\cos(\alpha) \int_0^t e^{-iK_m t}\,dt$$

$$q(t) - 0 = \frac{v_0\cos(\alpha)}{iK_m}\left(1 - e^{-iK_m t}\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = \mathrm{Re}(q) = \dfrac{v_0\cos(\alpha)}{K_m}\sin(K_m t) \\ y = \mathrm{Im}(q) = \dfrac{v_0\cos(\alpha)}{K_m}\left(\cos(K_m t) - 1\right) \end{array}}$$

II-3-d) En posant $R = \dfrac{v_0\cos(\alpha)}{K_m}$, on a



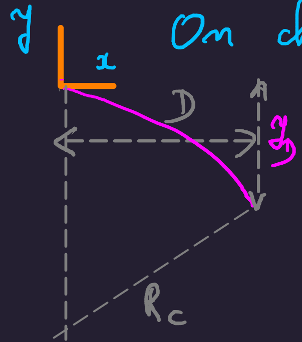
$$\boxed{\left(\frac{x}{R_c}\right)^2 + \left(\frac{y}{R_c} + 1\right)^2 = 1}$$: trajectoire circulaire de $\begin{cases} \text{rayon } R_c \\ \text{centre } (x = 0 \,;\, y = -R_c) \end{cases}$

Le rayon de courbure algébrique est $\boxed{-R_c}$ car la trajectoire « tourne à droite ».

On calcule

$$\boxed{R_c = \frac{2\,\overset{40}{v_0}\cos(\overset{20}{\alpha})\,\overset{0{,}43}{m}}{\pi \underset{0{,}11}{R^3}\,\underset{1{,}1}{\rho}\,\underset{2\pi\times 10}{\omega}\,\sin(\underset{\pi/2}{\beta})} = 1{,}1\cdot 10^2\ \text{m}}$$

II-4-a)



On cherche y quand $x = D$, soit

$$\left(\frac{D}{R_c}\right)^2 + \left(\frac{y_D}{R_c} + 1\right)^2 = 1$$

ic

$$\boxed{y_D = -\overset{111}{R_c} + \overset{35}{\sqrt{R_c^2 - D^2}} = -5{,}6\,m}$$

On pourra facilement tromper la personne gardant les buts avec une telle déviation.

II-4-b)

La force de frottement va diminuer la vitesse, la trajectoire ne sera plus circulaire. On utilise la base de Frenet ; dans le plan Oxy, en négligeant $\vec{g}$

$$m\vec{a} = \underbrace{-\frac{1}{2} C\pi R^2 \rho v \vec{v}}_{\propto \vec{v}} + \underbrace{m k_n (\dot{y}\vec{e}_x - \dot{x}\vec{e}_y)}_{\perp \vec{v}}$$

or

$$\vec{a} = \underbrace{\vec{a}_T}_{\propto \vec{v}} + \underbrace{\vec{a}_N}_{\perp \vec{v}} \Rightarrow a_N = \frac{v^2}{R_c} = k_n\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = k_n v$$

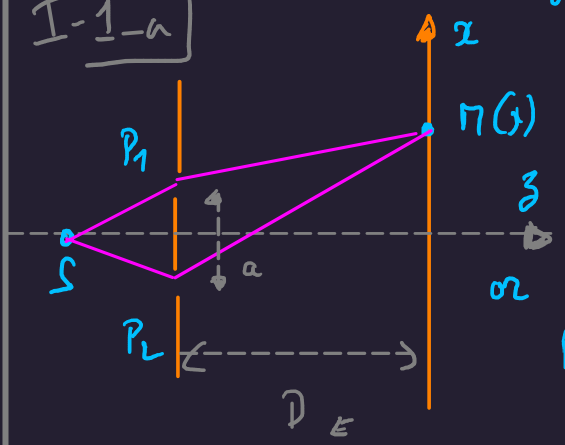
en norme

Finalement $R_c = \frac{v}{k_n}$ ← on retrouve le même résultat que dans le cas où v restait constant : $v_0\cos(\alpha)$ devient $\frac{v_0}{2} \to R_c$ et multiplié par $\frac{1}{2\cos(\alpha)}$: $\boxed{R_c = 59\,m}$

L'allure sera la suivante, avec une diminution de R_c. La déviation sera donc plus faible que dans le cas à $v = \text{cte}$

Pb 2 : Bételgeuse

I-1-a)



$$\delta = \overbrace{(SP_2 + P_2M) - (SP_1 + P_1M)}^{\times\, n = 1}$$

$$= \underbrace{P_2M - P_1M}_{\text{car } SP_2 = SP_1}$$

or $\vec{P_1M} = D\vec{e_z} + \left(x - \frac{a}{2}\right)\vec{e_x}$

$\vec{P_2M} = D\vec{e_z} + \left(x + \frac{a}{2}\right)\vec{e_x}$

I-1-b)

Pour $x \ll D_E$, $a \ll D_E$ (λ n'intervient pas) on a

P_1M et $P_2M \approx D_E$ $\quad \delta = \dfrac{P_2M^2 - P_1M^2}{P_2M + P_1M} = \dfrac{2ax}{2D_E} = \dfrac{ax}{D_E}$

interférences constructives pour $\delta = 0\ [\lambda]$

ie $\boxed{\dfrac{ax}{D_E} = p\lambda \quad p \in \mathbb{Z} \quad \text{ie } x = p\dfrac{\lambda D_E}{a}, \quad i = \dfrac{\lambda D_E}{a}}$

I-1-c) Formule de Fresnel :

sources 1, 2 $\Big\{$ intensité I_0 : $I = 2I_0 + 2\sqrt{I_0^2}\cos\left(\dfrac{2\pi\delta}{\lambda}\right)$

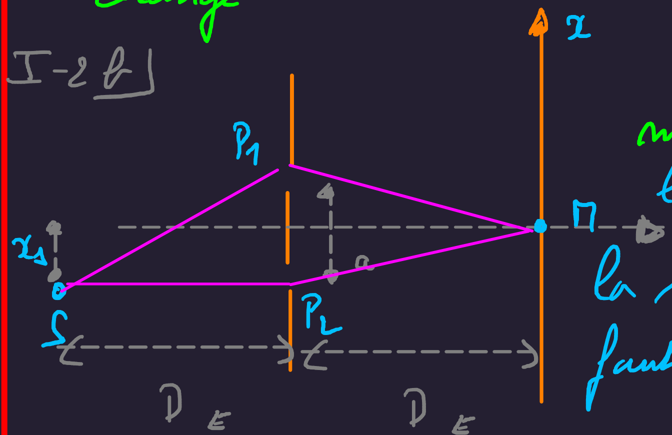
$$\boxed{I = 2I_0\left(1 + \cos\frac{2\pi a x}{\lambda D_E}\right) \qquad \alpha = \frac{2\pi a}{\lambda D_E}}$$

(I_0 :) intensité d'1 seule source

I-2-a)

i est indépendant de D_S : rien ne change

I-2-b)



$SP_2 \neq SP_1$ ici mais $P_1M = P_2M$: la situation est la même et il faut donc (puisque $D_S = D_E$)

$x_S = \dfrac{i}{2}$ ← interférence destructive

$$\boxed{x_S = \frac{\lambda D_E}{2a}}$$

I-3a)

On a toujours $P_2M - P_1M = \dfrac{ax}{P_1M + P_2M}$ et

$P_1M \simeq P_2M = \sqrt{D^2 + x^2} \simeq \dfrac{x}{\sin\theta}$ pour $a \ll x$, $a \ll D$ soit $P_2M - P_1M = a\sin\theta$.

De même $SP_2 - SP_1 = -a\sin\theta_s$.

$\rightarrow \boxed{\delta = a(\sin\theta - \sin\theta_1)}$

I-3-b) $\theta \ll 1$ $\theta_s \ll 1$ $\boxed{\delta \simeq a(\theta - \theta_s)}$

soit $I = 2I_0\left(1 + \cos\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right) = \boxed{2I_0\left(1 + \cos\frac{2\pi a}{\lambda}(\theta - \theta_s)\right)}$

$\beta = \frac{2\pi a}{\lambda}$

Deux directions angulaires d'interférences constructives différeront de $\boxed{\Delta\theta_\infty = \frac{\lambda}{a}}$

II 1a) $\boxed{\Delta\theta_\infty = \frac{\lambda}{a} = 2{,}0 \cdot 10^{-6}\,\text{rad}}$ (λ : $5{,}8 \cdot 10^{-7}$; a : $3 \cdot 10^{-1}$) ← indistinguable à l'oeil nu.

L'oeil peut résoudre $\Delta\theta_{min} = 1'$. Il faut grossir avec un télescope de $G = \frac{\Delta\theta_{min}}{\Delta\theta_\infty} = 150$

II 1b)

n_v →

$n = 1$ → fictif

Rajoute 1 chemin optique de $(n_v - 1)e$, on calcule

$\frac{(n_v - 1)e}{\lambda} = 9 \cdot 10^3$ → décalage de $9 \cdot 10^3$ interfranges! (n_v : 1,5 ; e : 1 cm)

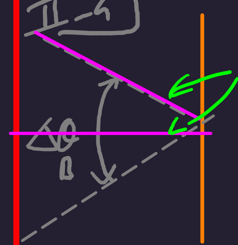
II-2) On somme :

$I = 4I_0 + 2I_0[\cos\beta\theta + \cos\beta(\theta - \theta_{s2})]$

$$\boxed{I = 4I_0\left[1 + \cos\beta\left(\theta - \frac{\theta_{s2}}{2}\right)\cos\left(\beta\frac{\theta_{s2}}{2}\right)\right]}$$

II-3) Quand $\cos\left(\beta\frac{\theta_{s2}}{2}\right) = 0$, (contraste nul : $I = 4I_0 = \text{cste}$ ← plus d'interférences), pour $\frac{\pi a \theta_{s2}}{\lambda} = \frac{\pi}{2}$ ie $\boxed{a = \frac{\lambda}{2\theta_{s2}}}$.

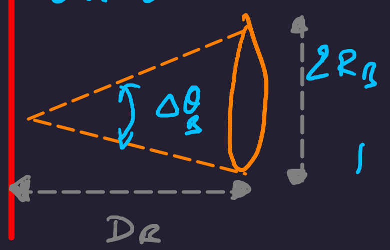
II-4)



Si d est tel que ces 2 directions donnent un contraste nul, toutes les paires $\theta, \theta + \frac{\Delta\theta_B}{2}$ feront de même, et on aura 1 contraste nul : il faut pour cela

$a = \frac{\lambda}{2\frac{\Delta\theta_B}{2}} = \frac{\lambda}{\Delta\theta_B}$ → $\boxed{\Delta\theta_B = \frac{\lambda}{a_B} = 1{,}85 \cdot 10^{-7}\,\text{rad}}$ (λ : $5{,}75 \cdot 10^{-7}$; a_B : 3,1)

On en déduit



$$\boxed{R_B = D_B\frac{\Delta\theta_B}{2} = \frac{D_B\,\lambda}{2a_B} = 4{,}7 \cdot 10^{11}\,\text{m}}$$

(D_B : $5{,}1 \cdot 10^{18}$; λ : $5{,}75 \cdot 10^{-7}$; a_B : 3,1)

II-5 • l'article donne $\lambda = 5,75 \cdot 10^{5}$ cm au lieu de $5,75 \cdot 10^{-5}$ cm, coquille ?

• le terme 1,22 absent du modèle utilisé vient du fait que la source lumineuse est un disque et non un segment

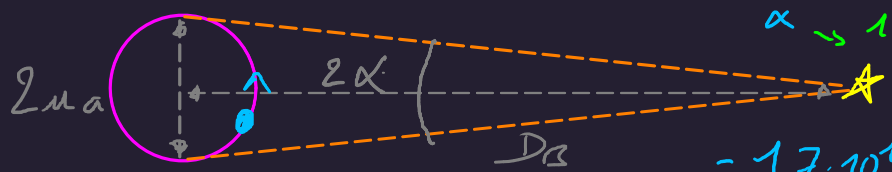
• 0,047 est la valeur de $\Delta\theta_B$ en secondes d'arc. On retrouve (en tenant compte du 1,22) la même valeur :

$$0,047 \times \frac{\pi}{180} \times \frac{1}{3600} = 1,22 \times 1,85 \cdot 10^{-7} \text{ rad.}$$

• la parallaxe est la distance angulaire entre les directions où est vu un astre depuis 2 points diamétralement opposés de l'orbite terrestre → elle donne $D_B = \frac{1\,ua}{\alpha}$

$1\,ua \leftarrow 1,5 \cdot 10^{11}$ m

$\alpha \rightarrow 18$ millisecondes d'arc



$= 1,7 \cdot 10^{18}$ m

inférieure à la valeur actuellement admise de $5,2 \cdot 10^{18}$ m.

• M & P calculent $R_B = \frac{2,4 \cdot 10^{8}\,mi}{2} = 1,9 \cdot 10^{11}$ m

en accord avec notre valeur si on prend

• leur valeur de D_B

• le facteur 1,22

car $\frac{1,9 \cdot 10^{11}}{1,22} \times \frac{5,1}{1,7} = 4,8 \cdot 10^{11}$ m.

Trombone de Koenig

I-1-a) $\xi_1(t,x) = X\cos\left[\omega\left(t - \frac{S_1M}{c}\right)\right]$

avec $S_1M = |x - x_1|$

I-1-b)

• $x_1 < x < x_2$: $S_1M = x - x_1$
$S_2M = x_2 - x$

$$\xi = X\left(\cos\left[\omega\left(t - \frac{x-x_1}{c}\right)\right] + \cos\left[\omega\left(t - \frac{x_2-x}{c}\right)\right]\right)$$

$$\boxed{= 2X\cos\left[\omega\left(t + \frac{x_1-x_2}{2c}\right)\right]\cos\left[\omega\left(\frac{x - \frac{(x_1+x_2)}{2}}{c}\right)\right]}$$

$x > x_2$: $S_1M = x - x_1$
$S_2M = x - x_2$

$$\xi = X\left(\cos\left[\omega\left(t - \frac{x-x_1}{c}\right)\right] + \cos\left[\omega\left(t - \frac{x-x_2}{c}\right)\right]\right)$$

$$\boxed{= 2X\cos\left[\omega\left(t - \frac{x - \frac{(x_1+x_2)}{2}}{c}\right)\right]\cos\left[\omega\left(\frac{x_2-x_1}{2c}\right)\right]}$$

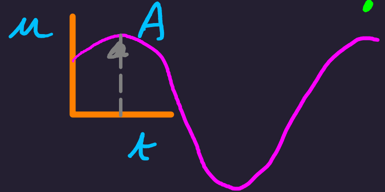
I-2 a) En $x=0$, $x_1 < x < x_2$, oscillations d'amplitude $2X$ pour $\cos\left(\omega\,\frac{x_1+x_2}{2c}\right) = \pm 1$, par exemple $\boxed{x_1 = -x_2}$

I-2-b) Pour $x > x_2$ on aura interférences destructives pour $\cos\omega\left(\frac{x_2-x_1}{2c}\right) = 0$, par exemple $\omega\left(\frac{x_2-x_1}{2c}\right) = \pi/2$, ie

$$\boxed{x_2 - x_1 = \frac{c\pi}{\omega} = \frac{\lambda}{2} \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

II-1) Les deux ondes sont progressives du haut-parleur au microphone : on est dans le cas $\boxed{x > x_2}$

II-2-a)



• Les variations de d_2 correspondent à des variations de $x_2 - x_1$.

• L'amplitude minimale n'étant pas nulle, les amplitudes des 2 ondes sont différentes : $X_1 \neq X_2$

En Fresnel :

$$\Delta\varphi = \omega\left(\frac{x_2-x_1}{c}\right) = \frac{2\pi(x_2-x_1)}{\lambda}$$

On passe de constructif à destructif quand $\Delta\varphi$ varie de π ie $x_2 - x_1$ varie de $\Delta(x_2 - x_1) = \Delta d_2$

tq $\dfrac{2\Delta d_2 \, \pi}{\lambda} = \pi$ ie $\Delta d_2 = \dfrac{\lambda}{2} = \dfrac{c}{2f}$

$$\rightarrow \boxed{c = 2\underbrace{f}_{7.10^3}\underbrace{\Delta d_2}_{2{,}5\ \text{cm}} = 35.10^2\ \text{m.s}^{-1}}$$

II-2-b

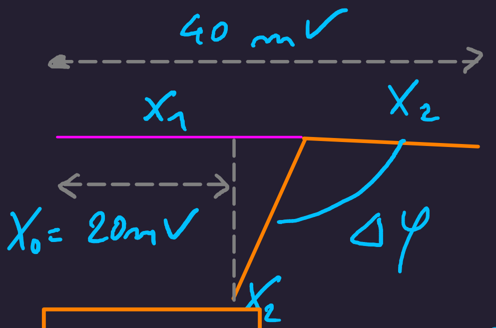
La construction de Fresnel montre que $\begin{cases} X_{min} = X_1 - X_2 \\ X_{max} = X_1 + X_2 \end{cases}$. On a donc

$\dfrac{X_1}{X_2} = 1{,}16$

$$\begin{cases} X_1 - X_2 = 3\ \text{mV} \\ X_1 + X_2 = 40\ \text{mV} \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} X_1 = 21{,}5\ \text{mV} \\ X_2 = 18{,}5\ \text{mV} \end{matrix}}$$

II-2-c

On était à 20 mV, on va jusqu'à 40 mV



Al Kashi donne :

$$X_0 = X_1 + X_2 \cos(\Delta\varphi)$$

$$\cos(\Delta\varphi) = \frac{X_0 - X_1}{X_2} = -8{,}1.10^{-2}$$

$\boxed{\Delta\varphi = 95°}$ or $\Delta\varphi = \dfrac{2\pi f L}{c}$

$$\rightarrow \boxed{L = \frac{\overbrace{c}^{35.10^2}\Delta\varphi}{2\pi \underbrace{f}_{7\ \text{kHz}}} = 1{,}3\ \text{cm}}$$

II-3

On a $\omega_2 = \omega_1 + 2\pi\Delta f$

$$X = X_1 \cos\left[\omega_1\left(t - \frac{x_1}{c}\right)\right] + X_2 \cos\left[\omega_2\left(t - \frac{x_2}{c}\right)\right]$$

$$= X_1 \cos\left[\omega_1\left(t - \frac{x_1}{c}\right)\right] + X_2 \cos\left[\omega_1\left(t - \frac{x_{20}}{c}\right) + \underbrace{2\pi\Delta f\left(t - \frac{x_0}{c}\right)}_{= \varphi_2}\right]$$

φ_2 correspond à une variation de d_2 telle que $-\dfrac{\omega d_2}{c} = 2\pi\Delta f\left(t - \dfrac{x_{20}}{c}\right)$

soit à une vitesse de

$$\boxed{v_2 = c\,\frac{2\pi\Delta f}{\omega} = \frac{\overbrace{c}^{350}\ \overbrace{\Delta f}^{2\ \text{Hz}}}{\underbrace{f}_{7\ \text{kHz}}} = 10\ \text{cm.s}^{-1}}$$